



সাইন্স কোচিং

বিষয়ঃ উচ্চতর গণিত (H.M-1)

(Revision Program Solve Sheet -2021)

প্রধান ক্যাম্পাসঃ বাসা#১৬, (সাইন্স কোচিং বিল্ডিং) রোড#০৬, ব্লক-এ, মিরপুর-১০, ঢাকা

যোগাযোগঃ ০১৬১৩-৬৭৬৭০১, ০১৬১১-১০০৬২১, ০১৯১৬-৫৮৭৬৭৭, ০১৭১৬৬৩৩৪০৬

Set-A

১। $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ এবং $g: \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ ফাংশনটি

$$g(x) = \frac{x-1}{2x+1}$$

ক) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ হলে $P(A)$ নির্ণয় কর।

খ) $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

গ) g এক এক এবং সার্বিক ফাংশন কিনা যাচাই কর।

১নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

১নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

$\therefore f(x)$ এর ডোম নির্ণয় : $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $16-x^2 \geq 0$ হয়।

$$\therefore 16-x^2 \geq 0$$

$$\text{বা, } 16 \geq x^2$$

$$\text{বা, } x^2 \leq 16$$

$$\text{বা, } x^2 - 16 \leq 0$$

$$\text{বা, } (x+4)(x-4) \leq 0$$

$$\text{বা, } x+4 \geq 0 \text{ এবং } x-4 \leq 0$$

$$\therefore x \geq -4 \text{ এবং } x \leq 4$$

\therefore নির্ণয় $f(x)$ এর ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\}$

১নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x-1}{2x+1}$

$g(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা যাচাই:

ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম g

ফাংশনটি এক-এক হবে যদি এবং কেবল যদি $g(x_1) = g(x_2)$ হলে

$$x_1 = x_2 \text{ হয়।}$$

$$\therefore g(x_1) = g(x_2)$$

$$\text{বা, } \frac{2x_1-1}{2x_1+1} = \frac{2x_2-1}{2x_2+1}$$

$$\text{বা, } \frac{2x_1-1}{2x_1+1} - 1 = \frac{2x_2-1}{2x_2+1} - 1$$

$$\text{বা, } \frac{2x_1-1-2x_1-1}{2x_1+1} = \frac{2x_2-1-2x_2-1}{2x_2+1}$$

$$\text{বা, } \frac{-2}{2x_1+1} = \frac{-2}{2x_2+1}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2x_1+1} = \frac{1}{2x_2+1}$$

$$\text{বা, } 2x_1+1 = 2x_2+1$$

$$\text{বা, } 2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

\therefore প্রদত্ত ফাংশনটি এক-এক

$g(x)$ ফাংশনটি সার্বিক কিনা যাচাই:

আমরা জানি, যদি কোনো ফাংশনের কোডোমেন সেট = রেঞ্জ সেট হয় তখন সেই ফাংশনটি সার্বিক হয়।

$$\therefore g(x) \text{ ফাংশনটির কোডোমেন} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$\therefore g(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় :

ধরি, $y = g(x)$ [যেখানে $y \in \mathbb{R}$]

$$\text{বা, } y = \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$\text{বা, } 2xy + y = 2x - 1$$

$$\text{বা, } 2xy - 2x = -1 - y$$

$$\text{বা, } x(2y-2) = -1-y$$

$$\therefore x = \frac{-1-y}{2y-2}$$

\therefore ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $2y-2 \neq 0$ বা, $y \neq 1$ হয়।

$g(x)$ ফাংশনটির রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{1\}$

যেহেতু কোডোমেন সেট \neq রেঞ্জ সেট

সুতরাং, $g(x)$ ফাংশনটি সার্বিক নয়।

২। $5+55+555+\dots$ এবং

$$S = \frac{1}{3x-2} + \frac{1}{(3x-2)^2} + \frac{1}{(3x-2)^3} + \dots \infty$$

ক) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ হতে অনুক্রমগুলো লেখ।

খ) প্রথম ধারাটির প্রথম 12 সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

গ) S ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। দেখাও যে, $x=2$ এর জন্য

সমষ্টি 0.3 ধারার সমষ্টির সমান।

২নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

মনে করি, অনুক্রমটির সাধারণ পদ $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$\therefore n = 1$ হলে, অনুক্রমটির ১ম পদ $u_1 = \cos\left(\frac{1 \times \pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$n = 2$ হলে, অনুক্রমটির ২য় পদ $u_2 = \cos\left(\frac{2 \times \pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$

$n = 3$ হলে, অনুক্রমটির ৩য় পদ $u_3 = \cos\left(\frac{3 \times \pi}{2}\right) = 0$

$n = 4$ হলে, অনুক্রমটির ৪র্থ পদ $u_4 = \cos\left(\frac{4 \times \pi}{2}\right) = \cos 2\pi = 1$

$n = 5$ হলে, অনুক্রমটির ৫ম পদ $u_5 = \cos\left(\frac{5 \times \pi}{2}\right) = 0$

$n = 6$ হলে, অনুক্রমটির ৬ষ্ঠ পদ $u_6 = \cos\left(\frac{6 \times \pi}{2}\right) = \cos 3\pi = -1$

.....
সুতরাং অনুক্রমটি হলো, $0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

২নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, ধারাটি $5 + 55 + 555 + \dots$

১ম ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি S_n হলে,

আমরা জানি, $S_n = 5 + 55 + 555 + 5555 + \dots$

$$= 5(1 + 11 + 111 + \dots)$$

$$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \dots)$$

$$= \frac{5}{9}\{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots\}$$

$$= \frac{5}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \dots) - (1 + 1 + 1 + \dots)\}$$

$$= \frac{5}{9}\left\{10\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - n\right\} \quad [\because \text{১ম পদ } a = 10 \text{ এবং}$$

সাধারণ অনুপাত $r = 10]$

\therefore ধারাটির প্রথম 12 টি পদের যোগফল

$$= \frac{5}{9}\left\{10\left(\frac{10^{12} - 1}{10 - 1}\right) - 12\right\} \quad (\text{Ans.})$$

২নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

$$S = \frac{1}{3x-2} + \frac{1}{(3x-2)^2} + \frac{1}{(3x-2)^3} + \dots$$

এখানে ধারাটির ১ম পদ $a = \frac{1}{3x-2}$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{(3x-2)^2} \div \frac{1}{3x-2} = \frac{1}{3x-2}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $= \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3x-2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3x-2-1}{3x-2}} = \frac{1}{\frac{3x-3}{3x-2}} = \frac{3x-2}{3x-3}$$

$\therefore x = 2$ হলে সমষ্টি $= \frac{1}{3 \cdot 2 - 3} = \frac{1}{3}$

$\therefore 0.\dot{3} = 0.333333\dots$
 $= 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots$

গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ $a = 0.3$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{0.03}{0.3} = 0.1$

\therefore সমষ্টি $= \frac{a}{1-r}$

$\therefore 0.\dot{3} = \frac{0.3}{1-0.1}$

$$= \frac{0.3}{0.9}$$

$$= \frac{3}{9}$$

$$= \frac{1}{3}$$

সুতরাং $x = 2$ এর জন্য সমষ্টি $0.\dot{3}$ ধারার সমষ্টির সমান। (দেখানো হলো)

৩। $A = \{x : x \in R \text{ এবং } x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0\}$,
 $B = \{2, 3\}$, $C = \{-2, 3, 5\}$

ক) $M = \{\emptyset\}$ হলে $P(M)$ নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$ ।

গ) প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ।

৩নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $M = \{\emptyset\}$

$\therefore P(M) = P(\{\emptyset\})$

$= \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ [Ans.]

৩নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

$B \cap C = \{2, 3\} \cap \{-2, 3, 5\} = \{3\}$

$\therefore P(B \cap C) = \{\{3\}, \emptyset\}$

$\therefore P(B) = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$

$P(C) = \{\{-2, 3, 5\}, \{-2, 3\}, \{-2, 5\}, \{3, 5\}, \{-2\}, \{3\}, \{5\}, \emptyset\}$

$\therefore P(B) \cap P(C) = \{\{3\}, \emptyset\}$

$\therefore P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$ (দেখানো হলো)

৩নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

'ক' থেকে পাই $A = \{-2, 2, 5\}$

$B = \{2, 3\}$, $C = \{-2, 3, 5\}$

$\therefore B \cup C = \{-2, 2, 3, 5\}$

$\therefore A \times (B \cup C) = \{(-2, -2), (-2, 2), (-2, 3), (-2, 5), (2, -2), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (5, -2), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$

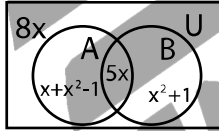
$\therefore A \times B = \{(-2, 2), (-2, 3), (2, 2), (2, 3), (5, -2), (5, 3)\}$

$\therefore A \times C = \{(-2, -2), (-2, 3), (-2, 5), (2, -2), (2, 3), (2, 5), (5, -2), (5, 3), (5, 5)\}$

$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(-2, -2), (-2, 2), (-2, 3), (-2, 5), (2, -2), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (5, -2), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$

সুতরাং $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (প্রমাণিত)

৪। তেনচিত্রে সার্বিক সেট U এবং উপসেট A, B এর সদস্য সংখ্যা দেখানো হয়েছে



ক) যদি $n(A) = n(B)$ তবে x এর মান নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, $n(A \setminus B)' = 31$

গ) $n(A' \cap B') + n(A' \cap B) + n(A \cap B')$ এর মান নির্ণয় কর।

৪নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে,

$$n(A) = n(B)$$

$$\text{বা, } x + x^2 - 1 + 5x = 5x + x^2 + 1$$

$$\text{বা, } x = 2$$

$$\therefore x \text{ এর মান } 2$$

৪নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

'ক' অংশ থেকে পাই,

$$\text{বামপক্ষ} = n(A \setminus B)' = n(U) - n(A \setminus B)$$

$$= (8x + x + x^2 - 1 + 5x + x^2 + 1) - (x + x^2 - 1)$$

$$= 14x + 2x^2 - x - x^2 + 1$$

$$= x^2 + 13x + 1 = 2^2 + 13 \cdot 2 + 1$$

$$= 4 + 26 + 1 = 31 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore n(A \setminus B)' = 31 \text{ (Ans.)}$$

৪নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = n(A' \cap B') + n(A' \cap B) + n(A \cap B')$$

$$= 8x + x^2 + 1 + x + x^2 - 1$$

$$= 9x + 2x^2$$

$$= 9 \times 2 + 2 \times 2^2$$

$$= 18 + 8$$

$$= 26 \text{ [Ans.]}$$

৫। $4 + 44 + 444 + \dots$ এবং

$(2x + 3)^{-1} + (2x + 3)^{-2} + (2x + 3)^{-3} + \dots$ দুইটি গুণোত্তর ধারা।

ক) $x = 2$ হলে, ২য় ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

খ) প্রথম ধারাটির প্রথম 12 সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ২য় ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

৫নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \dots$

$x = 2$ হলে, $2x + 3 = 7$

ধারাটি $= \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots$

$$\text{সাধারণ অনুপাত} = \frac{\frac{1}{7^2}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$$

৫নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, ধারাটি $4 + 44 + 444 + \dots$

১ম ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি S_n হলে,

$$S_n = 4 + 44 + 444 + 4444 + \dots$$

$$= 4(1 + 11 + 111 + \dots)$$

$$= \frac{4}{9}(9 + 99 + 999 + \dots)$$

$$= \frac{4}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots\}$$

$$= \frac{4}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \dots) - (1 + 1 + 1 + \dots)\}$$

$$= \frac{4}{9}\left\{10\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - n\right\} \quad [\because \text{১ম পদ } a = 10 \text{ এবং}$$

সাধারণ অনুপাত $r = 10]$

\therefore ধারাটির প্রথম 12টি পদের যোগফল

$$= \frac{4}{9}\left\{10\left(\frac{10^{12} - 1}{10 - 1}\right) - 12\right\} \text{ (Ans.)}$$

৫নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, $(2x + 3)^{-1} + (2x + 3)^{-2} + (2x + 3)^{-3} + \dots$

$$= \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \dots$$

$$\text{ধারাটির, সাধারণ অনুপাত } r = \frac{1}{(2x+3)^2} \div \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2x+3}$$

অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ বা, $\left|\frac{1}{2x+3}\right| < 1$ হয়

এখন, $\left(\frac{1}{2x+3}\right)$ ধনাত্মক হলে, অথবা, $\left(\frac{1}{2x+3}\right)$ ঋণাত্মক হলে

$$\text{বা, } \frac{1}{2x+3} < 1$$

$$\text{বা, } -\left(\frac{1}{2x+3}\right) < 1$$

$$\text{বা, } 2x+3 > 1$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2x+3} > -1$$

$$\text{হয়, } 2x+3 > 1$$

$$\text{বা, } 2x+3 < -1$$

$$\text{বা, } 2x > -2$$

$$\text{বা, } 2x < -4$$

$$\therefore x > -1$$

$$\therefore x < -2$$

\therefore অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি, $x < -1$ অথবা, $x < -2$ হয়।

$$\text{ধারারটির ১ম } a = \frac{1}{2x+3} \text{ এবং}$$

$$\begin{aligned} \text{সাধারণ অণুপাত } r &= \frac{1}{(2x+3)^2} \div \frac{1}{2x+3} \\ &= \frac{1}{2x+3} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ ধারারটির সমষ্টি } = \frac{a}{1-r}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{1}{2x+3}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2x+3}} \\ &= \frac{1}{\frac{2x+3-1}{2x+3}} \\ &= \frac{1}{\frac{2x+2}{2x+3}} \\ &= \frac{1}{2x+2} \end{aligned}$$