সাইন্স কোচিং

বিষয়ঃ উচ্চতর গণিত (H.M-1)

(Revision Program Solve Sheet -2020)

প্রধান ক্যাম্পাসঃ বাসা#১৬, (সাইন্স কোচিং বিল্ডিং) রোড#০৬, ব্লক-এ, মিরপুর-১০,ঢাকা
যোগাযোগঃ ০১৬১৩-৬৭৬৭০১, ০১৬১১-১০০৬২১, ০১৯১৬-৫৮৭৬৭৭, ০১৭১৬৬৩৩৪০৬

Set-A

১। $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6$

ক) সাধারণ পদটির মান নির্ণয় কর।

খ) x বর্জিত পদ এবং তার মান নির্ণয় কর।

গ) $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 তম ও 22 তম পদ দুইটি সমান হলে x এর মান নির্ণয় কর।

১নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

$\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ সাধারণ পদ।

প্রদত্ত রাশি $=\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6$

$$=\left\{(x)^2-2.x.\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6$$

$$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$$

$\therefore$ সাধারণ পদ বা, $(r+1)$ তম পদ $={}^{12}C_r x^{12-r}\left(\frac{-1}{x}\right)^r$ (Ans)

১নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

ক থেকে পাই $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$

মনে করি, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

এখন, $(r+1)$ তম পদ $={}^{12}C_r x^{12-r}\left(\frac{-1}{x}\right)^r$

$$={}^{12}C_r x^{12-r}.(-1)^r.x^{-r}$$

$$=(-1)^r.{}^{12}C_r x^{12-2r}$$

যেহেতু পদটিতে x^0 আছে,

$\therefore 12-2r=0$

বা, $2r=12$

$\therefore r=6$

$\therefore x$ বর্জিত পদ $=r+1=6+1=7$ তম পদ।

$\therefore x$ বর্জিত পদ অর্থাৎ $(6+1)$ তম পদের মান $=(-1)^6.{}^{12}C_6$

$$={}^{12}C_6$$

$$=924 \quad \text{[Ans.]}$$

১নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

$(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 তম ও 22 তম পদ সমান।

$(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে, $(r+1)$ তম পদ $={}^{44}C_r x^r$

$\therefore 21$ বা $(20+1)$ তম পদ $={}^{44}C_{20}x^{20}$

আবার, 22 বা $(21+1)$ তম পদ $={}^{44}C_{21}x^{21}$

প্রশ্নানুসারে,

${}^{44}C_{21}x^{21}={}^{44}C_{20}x^{20}$

বা, $x.\frac{44!}{21!(44-21)!}=\frac{44!}{20!(44-20)!}$

বা, $\frac{x}{21!.23!}=\frac{1}{20!.24!}$

বা, $\frac{x}{21.20!23!}=\frac{1}{20!24.23!}$

বা, $\frac{x}{21}=\frac{1}{24}$

বা, $\frac{x}{21}=\frac{1}{24}$

বা, $x=\frac{21}{24}$

$\therefore x=\frac{7}{8}$ (Ans)

২। $P(m)=m^3$ এবং

$$Q=\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{x^{16}-1}$$

ক) $x^3-x^2-10x-8$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ) প্রমাণ কর যে, $Q=\frac{1}{x-1}$।

গ) $\frac{1}{P(x)}+\frac{8}{P(y)}+\frac{27}{P(z)}=\frac{18}{xyz}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$ অথবা, $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$।

২নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

মনেকরি, $P(x)=x^3-x^2-10x-8$

$\therefore P(-1)=(-1)^3-(-1)^2-10(-1)-8$

$=-1-1+10-8$

$=-10+10$

$=0$

অতএব, $(x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $P(x)=x^3-x^2-10x-8$

$=x^3+x^2-2x^2-2x-8x-8$

$=x^2(x+1)-2x(x+1)-8(x+1)$

$=(x+1)(x^2-2x-8)$

$=(x+1)(x^2-4x+2x-8)$

$=(x+1)\{x(x-4)+2(x-4)\}$

$=(x+1)(x+2)(x-4)$

২নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, $Q=\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{x^{16}-1}$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{x^8+1}+\frac{16}{(x^8)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{x^8+1}+\frac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8(x^8-1)+16}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8x^8-8+16}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8x^8+8}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{(x^4)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{(x^4+1)^2(x^4-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4x^4-4+8}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4x^4+4}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{(x^2)-(1)^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2x^2-2+4}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2x^2+2}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{1}{x-1}\quad(\text{Proved})$$

২নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, $\frac{1}{P(x)}+\frac{8}{P(y)}+\frac{27}{P(z)}=\frac{18}{xyz}$

বা, $\frac{1}{x^3}+\frac{8}{y^3}+\frac{27}{z^3}=\frac{18}{xyz}$ $[\therefore p(m)=m^3]$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{2}{y}\right)^3+\left(\frac{3}{z}\right)^3-3\frac{1}{x}.\frac{2}{y}.\frac{3}{2}=0$ [মান বসিয়ে]

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{y}\right)^2+\left(\frac{2}{y}-\frac{3}{z}\right)^2+\left(\frac{3}{z}-\frac{1}{x}\right)^2\right\}=0$

হয়, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$

অথবা, $\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{y}\right)^2+\left(\frac{2}{y}-\frac{3}{z}\right)^2+\left(\frac{3}{z}-\frac{1}{x}\right)^2=0$

$\therefore \left(\frac{1}{x}-\frac{2}{z}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=0$

বা, $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}$

$\therefore \frac{x}{1}=\frac{y}{2}$

$\therefore \left(\frac{2}{y}-\frac{3}{z}\right)^2=0$

বা, $\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=0$

বা, $\frac{2}{y}=\frac{3}{z}$

$\therefore \frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

সুতরাং, $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

অতএব, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$ অথবা, $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ (প্রমাণিত)

৩। যদি (i) $\left(2x^2+\frac{a}{x^3}\right)^{10}$ (ii) $(a+3x)^n$ দুইটি বীজগণিতিয় রাশি।

ক) দ্বিপদী বিস্তৃতির আদর্শ আকার লিখ এবং সাধারণ পদ চিহ্নিত কর।

খ) (i) এর বিস্তৃতির x^{10} ও x^{-20} এর সহগ সমান হলে দেখাও যে, $a=2$

গ) (ii) এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদের মান যথাক্রমে $P, \frac{21}{2}px$ ও $189qx^2$ হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর।

৩নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দ্বিপদী বিস্তৃতির আদর্শ রূপ:

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}.x^1+{}^nC_2a^{n-2}.x^2+....+{}^nC_ra^{n-r}.x^r+....+x^n$$

এবং $(r+1)$ তম পদটি সাধারণ পদ অর্থাৎ, ${}^nC_ra^{n-r}.x^r$

৩নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

ধরি, উক্ত বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদে x^{10} বিদ্যমান

$\therefore (r+1)$ তম পদ $={}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(\frac{a}{x^3}\right)^r$

$={}^{10}C_r2^{10-r}.x^{20-2r}.a^r.x^{-3r}$

$={}^{10}C_r.2^{10-r}.a^r.x^{20-2r-3r}$

$={}^{10}C_r2^{20-r}.a^r.x^{20-5r}$

প্রশ্নানুযায়ী $20-5r=10$

বা, $20-10=5r$

$\therefore r=2$

$\therefore (2+1)$ তম পদে x^{10} বিদ্যমান

$\therefore (2+1)$ তম পদের সহগ $={}^{10}C_2.2^{10-2}.a^2$

$={}^{10}C_2.2^6.a^2$

$=11520a^2$

আবার, ধরি উক্ত বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদে x^{-20} বিদ্যমান।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $={}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(\frac{a}{x^3}\right)^r$

$={}^{10}C_r.2^{10-r}.x^{20-2r}.a^r.x^{-3r}$

$={}^{10}C_r2^{10-r}.a^r.x^{20-2r-3r}$

$={}^{10}C_r2^{10-r}.a^r.x^{20-5r}$

প্রশ্নানুযায়ী, $20-5r=-20$

বা, $20+20=5r$

বা, $40=5r$

$\therefore r=8$

অতএব, $(8+1)$ তম পদে x^{-20} আছে,

$\therefore (8+1)$ তম পদের সহগ $={}^{10}C_82^{10-8}a^8$

$={}^{10}C_82^2.a^8$

$=180a^8$

যেহেতু x^{10} ও x^{-20} এর সহগ সমান

সেহেতু, $180a^8=11520a^2$

বা, $\frac{a^8}{a^2}=\frac{11520}{180}$

বা, $a^6=64$

বা, $a^6=2^6$

$\therefore a=2$ [দেখানো হলো]

৩নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

'খ' থেকে পাই $a=2$

$\therefore$ (ii) রাশিটি হয় $(2+3x)^n$

$\therefore (2+3x)^n$ এর বিস্তৃতি

$=2^n+{}^nC_12^{n-1}.3x+{}^nC_2.2^{n-2}(3x)^2+...$

$=2^n+\frac{n!}{(n-1)!}2^{n-1}.3x+\frac{n!}{2!(n-2)}2^{n-2}(3x)^2+...$

$=2^n+n.2^{n-1}.3x+\frac{n(n-1)}{2}.2^{n-2}(3x)^2+....$

$=2^n+2^{n-1}.3nx+\frac{9n(n-1)}{2}.2^{n-2}.x^2+....$

শর্তানুযায়ী,

$p=2^n.........(i)$

$\frac{21}{2}px=2^{n-1}.3nx.........(ii)$

এবং $189qx^2=\frac{9(n-1)n}{2}.2^{n-2}.x^2.........(iii)$

(ii) নং হতে পাই,

$\frac{3.7px}{2}=3nx.^{n-1}$

বা, $\frac{7p}{2}=n.2^{n-1}$

বা, $7p=n.2^{n-1}.2$

বা, $7.2^n=n.2^n$ [1 হতে পাই]

বা, $\frac{7.2^n}{2^n}=n$

$\therefore n=7$

(i) নং হতে পাই, $p=2^7=128$

(iii) নং হতে পাই,

$189qx^2=\frac{9(n-1)n}{2}.2^{n-2}x^2$

বা, $q=\frac{9.7(7-1).2^{7-2}}{2\times189}$

বা, $q=\frac{9.7.6.2^5}{2\times189}$

বা, $q=\frac{378.(2^5)}{378}$

বা, $q = 2^5 = 32$

$\therefore q = 32$

অতএব, p ও q এর নির্ণেয় মান যথাক্রমে 128 ও 32.

৪। $F(p,q,r) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} - \frac{3}{pqr}$ **এবং** $P(x) = x^2 + x - 12$

ক) দেখাও যে, $F(p,q,r)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। **২**

খ) $P(x)$ কে $2x - m$ এবং $2x - n$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে, $m + n + 2 = 0$ **৪**

গ) $F(p,q,r) = 0$ হলে, প্রমাণ কর $pq + qr + pr = 0$ অথবা $p = q = r$ **৪**

৪নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $F(p,q,r) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} - \frac{3}{pqr}$

মনেকরি, প্রদত্ত রাশিটি p, q, r চলকের বহুপদী

p এর q, q এর r এবং r এর স্থলে p বসিয়ে পাই

$$F(q,r,p) = \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{p^3} - \frac{3}{q.r.p}$$

$$= \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} - \frac{3}{pqr}$$

দেখা যায় যে চলক গুলো স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি একই থাকে।

অর্থাৎ $F(p,q,r) = F(q,r,p)$

সুতরাং $F(p,q,r)$ চক্র-ক্রমিক রাশি। (দেখানো হলো)

৪নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, $P(x) = x^2 + x - 12$

$P(x)$ কে $2x - m$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$$P\left(\frac{m}{2}\right) = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right) - 12$$

$$= \frac{m^2}{4} + \frac{m}{2} - 12$$

এবং $P(x)$ কে $2x - n$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$$P\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right) - 12$$

$$= \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - 12$$

প্রশ্নমতে,

$$P\left(\frac{m}{2}\right) = P\left(\frac{n}{2}\right)$$

বা, $\frac{m^2}{4} + \frac{m}{2} - 12 = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - 12$

বা, $\frac{m^2 + 2m - 48}{4} = \frac{n^2 + 2n - 48}{4}$

বা, $m^2 + 2m - 48 = n^2 + 2n - 48$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $m^2 + 2m - n^2 - 2n = -48 + 48$

বা, $m^2 - n^2 + 2m - 2n = 0$

বা, $(m+n)(m-n) + 2(m-n) = 0$

বা, $(m+n+2)(m-n) = 0$

কিন্তু $m - n = 0$ হতে পারে না কারন, $m \neq n$

$\therefore m + n + 2 = 0$ [দেখানো হলো]

৪নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, $F(p,q,r) = 0$

বা, $\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} - \frac{3}{pqr} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2\right\} = 0$

হয় $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$ অথবা, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{qr + pr + pq}{pqr} = 0$ [$\because$ কতগুলো বর্গের সমষ্টি শূণ্য হলে

$\therefore qr + pr + pq = 0$ উহারা পৃথক পৃথক ভাবে শূণ্য হয়।]

$$\therefore \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 = 0 \text{ এবং } \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 = 0$$

বা, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 0$ বা, $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$

বা, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ বা, $\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

$\therefore p = q$ $\therefore q = r$

সুতরাং $p = q = r$

$\therefore pq + qr + pr = 0$ এবং $p = q = r$ (প্রমাণিত)

৫। $(1+kx)^n$ **যেখানে, k একটি ধ্রুবক এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। x এবং x^2 এর সহগ সমান সমান হলে-**

ক) $k(n-1)$ এর মান নির্ণয় কর। **২**

খ) $nk = 2\frac{1}{3}$ হলে k ও n এর মান কত? **৪**

গ) x বর্জিত পদটি বের কর এবং এর মান নির্ণয় কর। **৪**

৫নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

প্রদত্ত রাশি $=(1+kx)^n$; যেখানে k একটি ধ্রুবক এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$(1+kx)^n$ এর বিস্তৃতি $=1+{}^nC_1kx+{}^nC_2(kx)^2+\ldots\ldots$

$$=1+\frac{n!}{1!(n-1)!}kx+\frac{n!}{2!(n-2)!}k^2x^2+\ldots\ldots$$

$$=1+nkx+\frac{n(n-1)}{2}k^2x^2+\ldots\ldots$$

যেহেতু x ও x^2 এর সহগ সমান,

$$\therefore nk=\frac{n(n-1)}{2}k^2$$

বা, $1=\frac{n-1}{2}k$

বা, $2=k(n-1)$

$$\therefore k(n-1)=2$$

৫নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, $nk=2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

'ক' হতে পাই, $k(n-1)=2$

বা, $nk-k=2$

বা, $\frac{7}{3}-k=2$

বা, $\frac{7}{3}-2=k$

বা, $\frac{1}{3}=k$

এখন, $n.\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}\quad\left[\because k=\frac{1}{3}\right]$

$$\therefore n=7$$

৫নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

n ও k এর মান বসিয়ে,

প্রদত্ত রাশি $=\left(1+\frac{1}{3}.x\right)^7=\left(1+\frac{x}{3}\right)^7$

ধরি, বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত

$\therefore (r+1)$ তম পদ $={}^7C_1(1)^{7-r}.\left(\frac{x}{3}\right)^r$

$$={}^7C_r.\frac{x^r}{3^r}$$

পদটি x বর্জিত হলে, $x^r=x^0$

$$\therefore r=0$$

$\therefore$ ১ম পদটি x বর্জিত এবং x বর্জিত পদের মান,

$$={}^7C_0.\frac{1}{3^0}$$

$$=1\ [\text{Ans.}]$$