সাইন্স কোচিং

বিষয়ঃ উচ্চতর গণিত (H.M-3)

(Revision Program Solve Sheet -2021)

প্রধান ক্যাম্পাসঃ বাসা#১৬, (সাইন্স কোচিং বিল্ডিং) রোড#০৬, ব্লক-এ, মিরপুর-১০,ঢাকা
২য় ক্যাম্পাসঃ বাণিজ্যিক প্লট# ২৮ (মিরপুর ইংলিশ ভার্সন স্কুলের উল্টো দিকে), মেইন রোড# ১, সেনপাড়া, মিরপুর-১০, ঢাকা
যোগাযোগঃ ০১৬১৩-৬৭৬৭০১, ০১৬১১-১০০৬২১, ০১৯১৬-৫৮৭৬৭৭, ০১৭১৬৬৩৩৪০৬

Set-A

১। যদি $f(x)=ax^2+bx+c=0$ হয়, তবে

ক) যখন $f(x)=0$, তখন x এর মান নির্ণয় কর।

খ) যদি $a=1, b=-6, c=13$ হয়, তবে $\sqrt{f(x)+2}-\sqrt{f(x)}=\sqrt{10}-\sqrt{8}$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

গ) $f(x)=0$ কে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর। যখন $a=1, b=c=4$.

১নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

ক) যেহেতু $\mathrm{f(x)=0}$

$\because\ ax^2+bx+c=0$

বা, $4a(ax^2+bx+c)=4a\times 0$ [$4a$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $4a^2x^2+4abx+4ac=0$

বা, $(2ax)^2+2.2ax.b+b^2-b^2+4ac=0$

বা, $(2ax+b)^2=b^2-4ac$

বা, $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

বা, $2ax=-b\pm\sqrt{b^2 4ac}$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

১নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

খ) দেওয়া আছে, $f(x)=ax^2+bx+c$

এবং $a=1, b=-6, c=13$

$\therefore f(x)=1.x^2+(-6)x+13=x^2-6x+13$

এখানে, $\sqrt{f(x)+2}-\sqrt{f(x)}=\sqrt{10}-\sqrt{8}$

এখন, $x^2-6x+13=y$ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে,

$\sqrt{y+2}-\sqrt{y}=\sqrt{10}-\sqrt{8}$

বা, $\sqrt{y+2}+\sqrt{8}=\sqrt{y}+\sqrt{10}$

বা, $(y+2)++2\sqrt{8y+16}-y-10=2\sqrt{10}y$ [বর্গ করে]

বা, $y+10+2\sqrt{8y+16}-y-10=2\sqrt{10}y$

বা, $\sqrt{8y+16}=\sqrt{10y}$

বা, $8y+16=10y$ [বর্গ করে]

বা, $10y-8y=16$

বা, $2y=16$

বা, $y=8$

বা, $x^2-6x+13=8$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x^2-6x+5=0$

বা, $x^2-5x-x+5=0$

বা, $x(x-5)-1(x-5)=0$

বা, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ অথবা, 5

নির্ণেয় সমাধান $x=1,5$

১নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

গ) দেওয়া আছে, $f(x)=0$

আবার, $f(x)=ax^2+bx+c$ এবং $a=1, b=c=4$

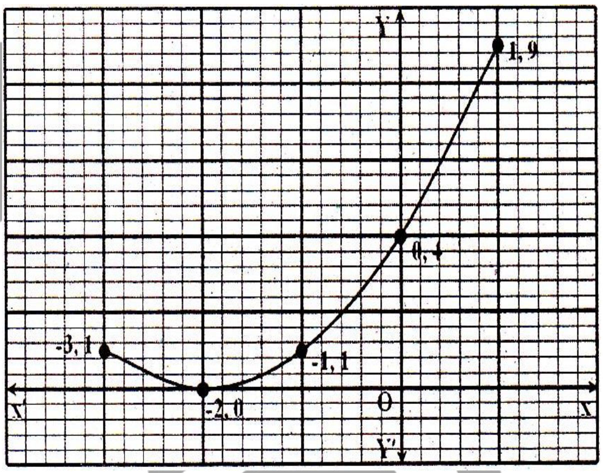
$\therefore\ x^2+4x+4=0..........(i)$

ধরি, $y=x^2+4x+4.........(ii)$

এখন, x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান নির্ণয় করিঃ

x	-3	-2	-1	0	1
y	1	0	1	4	9

ছক কাগজে x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 ঘরকে 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গকে 2 একক ধরে লেখচিত্র অঙ্কন করিঃ



দেখা যাচ্ছে যে লেখটি x অক্ষকে $(-2,0)$ বিন্দুতে ছেঁদ করে।

নির্ণেয় সমাধান $x=2.$

২। (i) $\sqrt[x]{a}=\sqrt[y]{b}=\sqrt[z]{c}$ (ii) $f(x)=1-3^{-\frac{1}{2}x}$

এবং (iii) $g(x)=\ln\frac{a+x}{a-x}$

ক) $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

খ) (i) হতে $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$ হলে দেখাও যে,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}$$

গ) $g(x)$ এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

২নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $f(x)=1-3^{-\frac{1}{2}x}$

ধরি, $y=f(x)=1-3^{-\frac{1}{2}x}$

$\therefore y=f(x)$

বা, $x=f^{-1}(y)$ [লগারিদমের সংজ্ঞানুসারে]

এবং $y=1-3^{-\frac{1}{2}x}$

বা, $3^{-\frac{1}{2}x}=-y$

বা, $\log_3 3^{-\frac{1}{2}x}=\log_3(1-y)$ [উভয়পক্ষে $\log_3$ নেই]

বা, $-\frac{1}{2}x\log_3 3=\log_3(1-y)$

বা, $-\frac{1}{2}x=\log_3(1-y)$

বা, $x=-2\log_3(1-y)$

$=\log_3(1-y)^{-2}$

$=\log_3\frac{1}{(1-y)^2}$ [Ans.]

২নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

(i) নং হতে দেওয়া আছে, $\sqrt[x]{a}=\sqrt[y]{b}=\sqrt[z]{c}$

বা, $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}$

বা, $a^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}=b^{\frac{1}{\frac{1}{3}}}$

বা, $a^2=b^3$

$\therefore \text{L.H.S}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$

$=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$

$=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(b^3)^{\frac{1}{2}}}+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{(a^2)^{\frac{1}{3}}}$

$=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{2.\frac{1}{2}}}+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{3.\frac{1}{3}}}$

$=a^{\frac{3}{2}-1}+b^{\frac{2}{3}-1}$

$=a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}$

$=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ [Showed]

২নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

এখানে, $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধু বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত হয়

সুতরাং $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $\frac{1+x}{1-x}>0$.হয়

এখন, $\frac{1+x}{1-x}>0$. হলে

$i)1+x>0$ এবং $1-x>0$ হয়

অথবা, $ii)1+x<0$ এবং $1-x<0$ হয়।

$i)$ থেকে পাই,

$x>-1$ এবং $1>x$

বা, $x>-1$ এবং $x<1$

$\therefore$ ডোমেন $=\{x\in R: x>-1\}\cap\{x\in R: x<1\}$

$=\{-1,\infty)\cap\{-\infty,1\}$

$=(-1,1)$

আবার, (ii) নং হতে+ $x<-1$ এবং $1<x$

বা, $x<-1$ এবং $x>1$

$\therefore$ ডোমেন $=\{x\in R: x<-1\}\cap\{x\in R: x>1\}$

$=(-\infty,-1)\cap(1,\infty)=\varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন, $D_J=(-1,1)\cup\varnothing=(-1,1)$ [Ans.]

রেঞ্জঃ $y=f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

বা, $e^y=\frac{1+x}{1-x}$

বা, $1+x=1e^y-xe^y$

বা, $x+xe^y=1e^y-1$

বা, $x(1+e^y)=1(e^y-1)$

বা, $x=\frac{1(e^y-1)}{1+e^y}$

$=\frac{1(e^y-1)}{e^y+1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f=R$

৩। (i) $\sqrt[a]{x}=\sqrt[b]{y}=\sqrt[c]{z}$ এবং $xyz=1$

(ii) $P=1+\log_a(bc)$, $Q=1+\log_b(ca)$

এবং $R=1+\log_c(ab)$

ক) দেখাও যে, $a+b+c=0$ ।

খ) প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{x^b+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^c+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^a+x^{-b}+1}=1$$

গ) দেখাও যে, $PQR=PQ+QR+PR$

৩নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

ধরি, $\sqrt[a]{x}=\sqrt[b]{y}=\sqrt[c]{z}=k$

$\therefore x=k^a, y=k^b, z=k^c$

শর্তমতে, $xyz=1$ বা, $k^ak^bk^c=1$

বা, $k^{a+b+c}=k^o$ $[\because k^o=1]$

$\therefore a+b+c=0$ (দেখানো হলো)

৩নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

বামপক্ষ= $\dfrac{1}{x^b+x^{-c}+1}+\dfrac{1}{x^c+x^{-a}+1}+\dfrac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$=\dfrac{1}{x^b+\dfrac{1}{x^c}+1}+\dfrac{1}{x^c+x^{-a}+1}+\dfrac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$=\dfrac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{1}{x^a+\dfrac{1}{x^b}+1}$

$[\because a+b+c=0 \therefore b+c=-a]$

$=\dfrac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{x^b}{x^{a+b}+x^b+1}$

$=\dfrac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{x^b}{x^{-c}+x^b+1}$

$[\because a+b+c=0 \therefore a+b=-c]$

$=\dfrac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{x^b}{\dfrac{1}{x^c}+x^b+1}$

$=\dfrac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\dfrac{x^b.x^c}{1+x^c+x^{b+c}}$

$=\dfrac{x^c+1+x^{b+c}}{1+x^c+x^{b+c}}=\dfrac{1+x^c+x^{b+c}}{1+x^c+x^{b+c}}=1$

$\therefore \dfrac{1}{x^b+x^{-c}+1}+\dfrac{1}{x^c+x^{-a}+1}+\dfrac{1}{x^a+x^{-b}+1}=1$

(দেখানো হলো)

৩নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, $P=1+\log_a bc$

বা, $P=\log_a a+\log_a bc$ বা, $P=\log_a abc$

বা, $a^P=abc$ বা, $a=(abc)^{\frac{1}{P}}$..........(i)

অনুরূপভাবে, $b=(abc)^{\frac{1}{Q}}$..........(ii)

এবং $c=(abc)^{\frac{1}{R}}$............(iii)

$(i)\times(ii)\times(iii)$ থেকে পাই,

$abc=(abc)^{\frac{1}{P}}.(abc)^{\frac{1}{Q}}.(abc)^{\frac{1}{R}}$

বা, $(abc)^1=(abc)^{\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}}$ $[\because a^m.a^n=a^{m+n}]$

বা, $\dfrac{1}{P}+\dfrac{1}{Q}+\dfrac{1}{R}=1$ বা, $\dfrac{QR+RP+PQ}{PQR}=1$

$\therefore PQR=RQ+QR+PQ$ (দেখানো হলো)

৪। $P=\dfrac{2x}{x-1}$ **এবং** $q=\log_k(1+x)-2\log_k x$ **হলে-**

ক) $2^p=256$ **হলে** x **এর মান নির্ণয় কর।** **২**

খ) $q=0$ **হলে দেখাও যে,** $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **৪**

গ) $6\sqrt{p}+5\sqrt{\dfrac{1}{p}}=13$ **হলে,** x **এর মান নির্ণয় কর।** **৪**

৪নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $p=\dfrac{2x}{x-1}$

এখন, $2^p=256$ বা, $2^{\left(\frac{2x}{x-1}\right)}=2^8$

বা, $\dfrac{2x}{x-1}=8$ বা, $8(x-1)=2x$ বা, $8x-8=2x$

বা, $8x-2x=8$ বা, $6x=8$ বা, $x=\dfrac{8}{6}$ $\therefore x=\dfrac{4}{3}$ $(Ans.)$

৪নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, $q=0=\log_k(1+x)-2\log_k(x)$

বা, $\log_k(1+x)=2\log_k(x)$

বা, $\log_k(1+x)=\log_k x^2$ $[(\log_k P^r=r\log_k P)]$

বা, $1+x=x^2$

বা, $x^2-x-1=0$

বা, $4x^2-4x-4=0$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2x)^2-2.2x.1+1^2-5=0$

বা, $(2x-1)^2=5$

বা, $2x-1=\sqrt{5}$ [ঋণাত্মক মান বর্জন করে]

বা, $2x=1+\sqrt{5}$

বা, $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (দেখানো হলো)

৪নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, $p=\dfrac{2x}{x-1}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $6\sqrt{p}+5\sqrt{\dfrac{1}{p}}=13$

বা, $6\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}}}-13=0$

বা, $6a+\frac{5}{a}-13=0$ [ধরি $\sqrt{\frac{2x}{x-1}}=a$]

বা, $6a+\frac{5}{a}=13$ বা, $6a^2+5=13a$

বা, $6a^2-13a+5=0$ বা, $6a^2-10a-3a+5=0$

বা, $2a(3a-5)-1(3a-5)=0$

$\therefore (3a-5)(2a-1)=0$

হয়, $3a-5=0$ অথবা, $2a-1=0$

বা, $3a=5$ বা, $2a=1$

বা, $a=\frac{5}{3}$ বা, $a=\frac{1}{2}$

বা, $\sqrt{\frac{2x}{x-1}}=\frac{5}{3}$ বা, $\sqrt{\frac{2x}{x-1}}=\frac{1}{2}$

বা, $\frac{2x}{x-1}=\frac{25}{9}$ বা, $\frac{2x}{x-1}=\frac{1}{4}$

বা, $25x-25=18x$ বা, $8x=x-1$

বা, $25x-18x=25$ বা, $7x=-1$

বা, $7x=25$ $\therefore x=-\frac{1}{7}$

$\therefore x=\frac{25}{7}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x=\frac{25}{7}$ হলে সমীকরণ (i)এর

বামপক্ষ $=6\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}}}$

$=6\sqrt{\frac{50}{18}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{50}{18}}}=6\sqrt{\frac{25}{9}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{25}{9}}}$

$=\frac{6.5}{3}+\frac{5.3}{5}=10+3=13=$ ডানপক্ষ

$\therefore\ x=\frac{25}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

আবার, $x=-\frac{1}{7}$ হলে, সমীকরণ (i) এর

বামপক্ষ $=6\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}}}$

$=6\sqrt{\frac{-\frac{2}{7}}{\frac{-8}{7}}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{-\frac{2}{7}}{\frac{-8}{7}}}}=6\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=6.\frac{1}{2}+5.2$

$=3+10=13=$ ডানপক্ষ

$\therefore x=-\frac{1}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=\frac{25}{7},-\frac{1}{7}$

৫। $l=a^{y-z}$, $m=a^{z-x}$, $n=a^{x-y}$

$A=a^2-3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{-2}{3}}+2$ এবং $K=\sqrt[3]{p+q}+\sqrt[3]{p-q}$

ক) lmn **এর মান নির্ণয় কর।**

খ) $A=0$ **হলে, দেখাও যে,** $3a^3+9a=8$

গ) $p^2-q^2=r^3$ **হলে, প্রমাণ কর যে,**

$k^3-3kr-2p=0$

৫নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $\ell=a^{y-z}$

$m=a^{z-x}$

$n=a^{x-y}$

$\therefore \ell mn=a^{y-z}.a^{z-x}.a^{x-y}$

$=a^{y-z+z-x+x-y}$

$=a^0$

$=1\ (Ans.)$

৫নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, $A=a^2-3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{-2}{3}}+2$

প্রশ্নমতে, $A=0$

বা, $a^2-3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{-2}{3}}+2=0$

বা, $a^2=3^{\frac{2}{3}}-2+3^{\frac{-2}{3}}$

বা, $a^2=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2-2.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{-1}{3}}+\left(3^{\frac{-1}{3}}\right)^2$

বা, $a^2=\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{-1}{3}}\right)^2$

বা, $a=3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{-1}{3}}$

বা, $a^3=\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{-1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $a^3=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(3^{\frac{-1}{3}}\right)^3-3.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{-1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{-1}{3}}\right)$

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}.a \quad \left[\because 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3.3^o.a$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a \quad [\because 3^o = 1]$

বা, $a^3 = \frac{9-1-9a}{3}$

বা, $3a^3 = 8 - 9a$

$\therefore 3a^3 + 9a = 8$ (দেখানো হলো)

<u>৫নং প্রশ্নের উত্তর (গ)</u>

দেওয়া আছে, $k = \sqrt[3]{p+q} + \sqrt[3]{p-q}$

এবং $p^2 - q^2 = r^3$

এখানে, $k = (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}$

বা, $k^3 = \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $k^3 = \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$

$+3.(p+q)^{\frac{1}{3}}(p-q)^{\frac{1}{3}}\left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}$

$\left[\because (p+q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p+q)\right]$

বা, $k^3 = p + q + p - q + 3\left(p^2 - q^2\right)^{\frac{1}{3}}.k$

$\left[\because (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}} = k\right]$

বা, $k^3 = 2p + 3.\left(r^3\right)^{\frac{1}{3}}.k \quad \left[\because p^2 - q^2 = r^3\right]$

বা, $k^3 = 2p + 3rk$

$\therefore k^3 - 3rk - 2p = 0$ (প্রমাণিত)