সাইন্স কোচিং

বিষয়ঃ উচ্চতর গণিত (H.M-5)

(Revision Program Solve Sheet -2021)

প্রধান ক্যাম্পাসঃ বাসা#১৬, (সাইন্স কোচিং বিল্ডিং) রোড#০৬, ব্লক-এ, মিরপুর-১০,ঢাকা
যোগাযোগঃ ০১৬১৩-৬৭৬৭০১, ০১৬১১-১০০৬২১, ০১৯১৬-৫৮৭৬৭৭, ০১৭১৬৬৩৩৪০৬

Set-A

১। যে কোন ত্রিভুজে $A+B+C=\pi$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=P$$

ক) $30^0 12' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

খ) দেখাও যে, $P-2=0$.

গ) প্রমাণ কর যে,

$$\sin\frac{A+B}{2}+\tan\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}(1+\operatorname{cosec}\frac{C}{2})$$

১নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

$$30^0 12' 36''=30^o\left(12\frac{36}{60}\right)'$$

$$=30\left(12\frac{3}{5}\right)'$$

$$=30\left(\frac{63}{5}\right)'$$

$$=\left(30\frac{63}{5\times 60}\right)^o$$

$$=\left(30\frac{21}{100}\right)^o$$

$$=\left(\frac{3021}{100}\right)^o$$

$$=\frac{3021}{100}\times\frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$=\frac{3021\pi}{1800}$$

$$=.5273^C \text{ (প্রায়)}$$

১নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে,

$$\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=P$$

বা, $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=P$

বা, $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}=P$

বা, $1+1=P$

বা, $P=2$

$\therefore P-2=0$ (Showed)

১নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, $A+B+C=\pi$

বা, $A+B=\pi-C$

$\therefore \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

$\therefore L.H.S=\sin\frac{A+B}{2}+\tan\frac{A+B}{2}$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

$$=\cos\frac{C}{2}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\cos\frac{C}{2}\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$=\cos\frac{C}{2}(1+\operatorname{cosec}\frac{C}{2})$$

$$=R.H.S$$

$\therefore L.H.S=R.H.S$ (Proved)

২। $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ এবং $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=z$

ক) $\tan 5\alpha=\cot 13\alpha$ হলে 11α এর মান বের কর। (যেখানে α সূক্ষ্মকোণ)

খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{x-y+1}{x+y-1}=z$

গ) $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $0^0<\theta\le 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

২নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

দেওয়া আছে, $\tan 5\alpha=\cot 13\alpha$

বা, $\tan 5\alpha=\tan(90^o-13\alpha)$

বা, $5\alpha=90^o-13\alpha$

বা, $18\alpha=90^o$

$\therefore \alpha=5^o$

বা, $11\alpha=11\times 5^o$

$=55^o$ [Ans.]

২নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

দেওয়া আছে, $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ এবং $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=z$

$\therefore L.H.S=\frac{x-y+1}{x+y-1}$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta+1}{\cos\theta+\sin\theta-1}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)}{\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)}$$

$$= \frac{\cot\theta - 1 + \operatorname{cosec}\theta}{\cot\theta + 1 - \operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{csec}\theta + \cot\theta - 1}{\cot\theta + 1 - \operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta - (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{\cot\theta + 1 - \operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta - (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)}{\cot\theta + 1 - \operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(1 - \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}{(1 - \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{(1 + \cos\theta)\sin\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1 + \cos\theta)\sin\theta}{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1 + \cos\theta)\sin\theta}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$= Z$$

$$= R.H.S$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ (Proved)

২নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = z$

এবং $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $1 - \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta$

বা, $1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta = 3\sin^2\theta$

বা, $1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta = 3 - 3\cos^2\theta$

বা, $4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 1) + 1(\cos\theta - 1) = 0$

বা, $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

হয়, $\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \cos\pi$ বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \pi$ বা, $\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{3}$

আবার, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ বা, $\cos\theta = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$

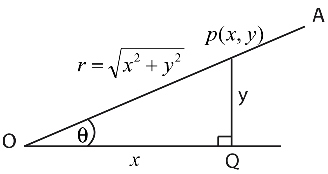
বা, $\cos\theta = \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$ বা, $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{4\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\theta = \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$

৩।



ক) $\sin\left(-\frac{95\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) উদ্দিপকের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$

গ) $\frac{y}{r} + \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} = \sqrt{2}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

৩নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

$$\sin\left(-\frac{95\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin\frac{95\pi}{6}$$

$$= -\sin\left(\frac{96\pi - \pi}{6}\right)$$

$$= -\sin\left(16\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$ [Ans.]

৩নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

চিত্রে $r = \sqrt{x^2 + y^2} = OP$

এবং $OP = r$

বা, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$

বা, $x^2 + y^2 = r^2$

বা, $x^2 \le r^2$ এবং $y^2 \le r^2$

বা, $|x| \le r$ এবং $|y| \le r$

বা, $-r < x < r$ এবং $-r < y < r$

বা, $-1 \le \frac{x}{r} \le 1$ এবং $-1 \le \frac{y}{r} \le 1$.........(i)

যেহেতু $\sin\theta = \frac{x}{r}$ এবং $\cos\theta = \frac{y}{r}$

(i) নং হতে $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$ (প্রমাণিত)

৩নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

এখানে, ΔPOQ এ লম্ব= $PQ = y$, ভূমি= $OQ = x$,

অতিভুজ= $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\therefore \frac{y}{r} = \sin\theta$ এবং $\frac{x}{r} = \cos\theta$

$\therefore \frac{y}{r} + \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - y^2}}{r} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \frac{x}{r} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\left(\cos\theta - \sqrt{2}\right)^2 = (-\sin\theta)^2$

বা, $\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = \sin^2\theta$

বা, $\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 1 - \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\left(\sqrt{2}\cos - 1\right)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

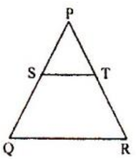
বা, $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos 45^o$

$\therefore \theta = 45^o$

৪।



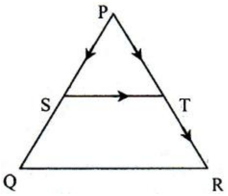
ΔPQR এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T

ক) $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ) ভেক্টরে সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $ST \parallel QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$ ৪

গ) চতুর্ভুজ $SQRT$ এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$ ৪

৪নং প্রশ্নের উত্তর (ক)



ত্রিভুজ PST হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$

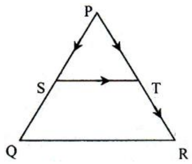
বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ [T, PR এর মধ্যবিন্দু বিধায় $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$]

বা, $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

৪নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

মনেকরি, PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T. S, T যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $ST \parallel QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR.$



ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{ST}$..........(1)

এবং $\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR}$...........(2)

কিন্তু $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PT}, \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PS}$

[$\because S$ ও T যথাক্রমে PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু]

$\therefore (2)$ থেকে পাই,

$2\overrightarrow{PT} - 2\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

বা, $2\left(\overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PS}\right) = \overrightarrow{QR}$

বা, $2\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{QR}$, [(1) হতে]

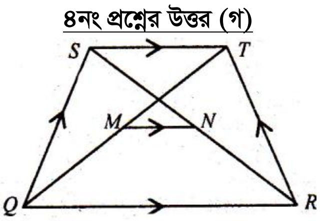
$\therefore \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

আবার, $\left|\overrightarrow{ST}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\right|$

বা, $ST = \frac{1}{2}QR$

সুতরাং $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ ST এবং QR সমান্তরাল। [প্রমাণিত]

৪নং প্রশ্নের উত্তর (গ)



মনে করি, $QRTS$ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়, QR ও ST এবং ট্রাপিজিয়ামের QT ও RS কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N.M, N যোগ করি।

ধরি, $QR > ST$. প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \| ST \| QR$

এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$.

প্রমাণঃ মনে করি, কোন নির্দিষ্ট ভেক্টর মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে Q, R, T, S বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}, \underline{r}, \underline{t}, \underline{s}$ তাহলে,

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ এবং $\overrightarrow{ST} = \underline{t} - \underline{s}$.

আবার, QT রেখাংশের মধ্যবিন্দু M এর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{t})$

এবং RS রেখাংশের মধ্যবিন্দু N এর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{t})$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s} - \underline{q} - \underline{t})$$
$$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) + (\underline{s} - \underline{t})\}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST})$$

$[\because \overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ এবং $-\overrightarrow{ST} = -(\underline{t} - \underline{s}) = \underline{s} - \underline{t}]$

$QRTS$ ট্রাপিজিয়ামের $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST})$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ এর) সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore MN \| ST \| QR$

আবার, $|\overrightarrow{QR}| = QR, |\overrightarrow{ST}| = ST$ এবং $|\overrightarrow{MN}| = MN$

$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{ST}|\right)$

বা, $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$. (প্রমাণিত)

৫। $\mathrm{A, B, C}$ **বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর** $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ।

ক) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **এর মান নির্ণয় কর।** ২

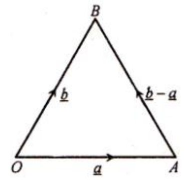
খ) C **বিন্দু** AB **রেখাংশকে** $\mathrm{m : n}$ **অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে দেখাও যে,** $\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ ৪

গ) C **বিন্দু** AB **রেখাংশকে** $\mathrm{m : n}$ **অনুপাতে বহিঃর্বিভক্ত করলে দেখাও যে,** $\underline{c} = \frac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$ ৪

৫নং প্রশ্নের উত্তর (ক)

মনে করি, O হচ্ছে মূলবিন্দু এবং A ও B যে কোন বিন্দু ।

তাহলে O বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$ ।



ধরি, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$

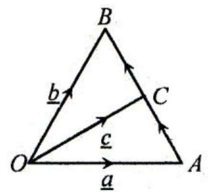
তাহলে, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

৫নং প্রশ্নের উত্তর (খ)

মনে করি, মূল বিন্দু O এবং A, B দুইটি বিন্দু। O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এবং C, AB কে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। O, C যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \left(\frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}\right)$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $AC : CB = m : n$

বা, $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{m}{n}$ $[\therefore AB = |\overrightarrow{AB}|]$

বা, $|\overrightarrow{AC}| = \frac{m}{n}|\overrightarrow{CB}|$

বা, $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \frac{m}{n}(\underline{b} - \underline{c})$ $[\because \overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}, \overrightarrow{CB} = \underline{b} - \underline{c}]$

বা, $n\underline{c} - n\underline{a} = m\underline{b} - m\underline{c}$

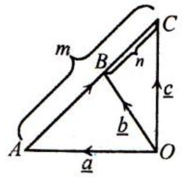
বা, $m\underline{c} + n\underline{c} = m\underline{b} + n\underline{a}$

বা, $\underline{c}(m + n) = m\underline{b} + n\underline{a}$

$\therefore \underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ (প্রমাণিত)

৫নং প্রশ্নের উত্তর (গ)

দেওয়া আছে, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.AB রেখাংশ C বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \frac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$



প্রমাণঃ যেহেতু AB রেখাংশ C বিন্দুতে $m:n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$$

বা, $$\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{m}{n}$$

বা, $$\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right| - \left|\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{m-n}{n}$$ [বিয়োজন করে]

বা, $$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{m-n}{n}$$

বা, $$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \frac{n}{m-n}\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

বা, $$\overrightarrow{BC} = \frac{n}{m-n}\overrightarrow{AB}$$ [$\because$ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর দিক একই]

বা, $$\underline{c} - \underline{b} = \frac{n}{m-n}(\underline{b} - \underline{a})$$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

বা, $$\underline{c} = \frac{n\underline{b} - n\underline{a}}{m-n} + \underline{b}$$

বা, $$\underline{c} = \frac{n\underline{b} - n\underline{a} + m\underline{b} - n\underline{b}}{m-n}$$

বা, $$\underline{c} = \frac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m-n}$$

$$\therefore \underline{c} = \frac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n-m}$$ [দেখানো হলো]